DETERMINACIÓN DEL TIEMPO DE ROTACIÓN EN RODALES HACIENDO USO DEL MODELO DE NÄSLUND

Por: Lía G. Medina Boldt [1]
David F. Muñoz Negrón [2]

RESUMEN

Se discute la determinación del tiempo de rotación óptimo en rodales utilizando el modelo de Näslund asumiendo la existencia de datos experimentales. Se determina, asimismo, el tiempo de rotación y programa de inversiones en rodales de *Pinus Radiata*, asumiendo un comportamiento asimétrico de la velocidad de incremento en madera respecto del tiempo de máxima velocidad.

SUMMARY

In this paper we discuss the determination of the optimal rotation of a forest, making use of the Näslund model and supposing the existence of experimental data. We determinate also the optimal rotation time and the investment schedule on *Pinus Radiata* forest, under the assumption of an asymmetric behaviour for the growth rate in relation to the time of maximum speed.

INTRODUCCIÓN

En la administración y manejo de bosques controlados se presenta el problema de decidir el tiempo al cual debe realizarse el corte o rotación con fines de explotación económica. Se sabe que la velocidad de crecimiento del rodal incrementa en los primeros años, para decrecer cuando el rodal se va acercando al volumen de madurez; por otro lado, algunos gastos silviculturales (raleos, podas, fertilización, riegos, etc.) pueden acelerar esta velocidad de crecimiento.

Teniendo como punto de partida las observaciones mencionadas, el problema de la rotación óptima debe considerar la influencia de una inversión en gastos silviculturales (en la época adecuada), así como el precio de la madera y la influencia de ciertas variables como la edad y volumen de madera del rodal en la velocidad de crecimiento. Debe indicarse, que como el efecto de la inversión en gastos silviculturales depende de la época en la cual se realice, dicha inversión debe ser considerada como una función del tiempo, de tal manera que el problema de la rotación óptima así concebido se presenta como un problema de control óptimo (optimización en espacios de funciones).

En el presente artículo se utiliza un modelo de rotación óptima propuesto por Näslund (7), el cual requiere la estimación de la velocidad de incremento en volumen como función de los gastos silviculturales, la edad del rodal y el volumen de madera del mismo, para lo cual se debe recurrir a un análisis de regresión, siguiendo las sugerencias de Kuusela y Kilkki (5).

Uno de los problemas encontrados en la ejecución de esta investigación ha sido la falta de registros sobre los gastos silviculturales en bosques controlados, debido posiblemente a la escasez y juventud de los bosques controlados en nuestro medio, lo cual condujo a la alternativa de simular los resultados. Este hecho hace que el presente trabajo deba ser considerado como una guía metodológica, esperando que pueda ser aprovechado en la medida en que se disponga de dichos registros.

[1] Ingeniero estadístico, Profesora del Departamento de Estadística en la Universidad Nacional Agraria, La Molina
[2] Bachiller en Ciencias – Estadística, Magíster en Matemáticas, Profesor de Estadística en la Universidad Nacional Agraria, La Molina.

REVISIÓN DE LITERATURA

Un planteamiento formal del problema de control óptimo comprende el tiempo, las variables de estado, las variables de control, las ecuaciones de movimiento y la funcional objetivo.

En cualquier tiempo t, el estado del sistema se caracteriza por n números reales $x_1(t)$, $x_2(t)$,...., $x_n(t)$, agrupados en el vector de estados:

$$x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots\ldots, x_n(t))$$

De la misma manera, las decisiones tomadas al tiempo t se caracterizan por los valores de las variables de control $v_1(t)$, $v_2(t)$, ..., $v_m(t)$ representados en el vector de control:

$$v(t) = (v_1(t), v_2(t), \ldots\ldots, v_m(t))$$

Las ecuaciones de movimiento se representan generalmente por el sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\dot{x}(t)=f(x(t), v(t), t),\ 0 \leq t \leq T$$

$$x(0) = x_0$$

Para cada trayectoria de control v continua por tramos y cada función f continuamente diferenciable existirá una única trayectoria x para el estado del sistema (8).

La funcional objetivo es una función evaluadora del costo ó del beneficio por mantener al sistema bajo una trayectoria de control v, pero corno la trayectoria de control determina el estado final del sistema x (T), la funcional objetivo queda planteada como:

$$J(v(.), x(.), T) = g(x(T)).$$

El problema clásico del control óptimo queda planteado entonces como:

$$\text{Min } J(v, x, T) = g(x(T)) \qquad (1.1)$$

$$\dot{x} = f(x, v, t) \qquad (1.2)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (1.3)$$

En la mayoría de los casos la funcional objetivo se plantea como una integral:

$$J(v, x, T) = \int_0^T h(v,x,t)dt$$

Este caso se reduce sin dificultad al caso anterior introduciendo la variable de estado n+l

$$\dot{x}_{n+1} = h(v, x, t)$$

$$x_{n+1}(0) = 0$$

resultando $J(v, x, T) = x_{n+1}(T)$.

El problema clásico del control óptimo consiste entonces en encontrar un control óptimo u (.) que minimice (1.1), el cual proporcionara una trayectoria y (.) para las variables de estado de acuerdo a las ecuaciones (1.2) y (1.3) . Un procedimiento para solucionar el problema es el llamado principio del máximo de Pontryagin (9), dicho principio establece condiciones necesarias para el control óptimo, las cuales, bajo ciertas asunciones sobre la naturaleza de la funcional J se convierten en suficientes. Las condiciones derivadas del principio del máximo pueden obtenerse por analogía con la teoría de optimización, clásica de los multiplicadores de Lagrange, como se indica a continuación:

Sea $p(t) = (p_1(t), p_2(t), \ldots\ldots p_n(t))$ el vector de multiplicadores de Lagrange. El Lagrangiano asociado a (1.1), (1.2) y (1.3) resulta:

$$L = g(x(T)) + \int_0^T \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - f_i(x,v,t))\} dt$$

El cual, luego de integrar por partes se convierte en:

$$L = g\big(x(T)\big) + \sum_{i=1}^{n} p_i \quad (T)\, x_i \quad (T) - \sum_{i=1}^{n} p_i\,(0) x_i \quad (0) - \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n} \dot{p}_i \quad x_i \right) dt - \int_0^T \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \quad f_i(x,v,t) \right) dt$$

Las condiciones necesarias pueden obtenerse entonces derivando respecto de x y v, las cuales se expresan cómodamente definiendo el Hamiltoniano:

$$H(x,v,p,t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \quad f_i(x,v,t)$$

Bajo esta notación, las condiciones necesarias para que u(.) sea un control optimal, siendo y(.) su correspondiente trayectoria de estado son:

$$p(T) = -g'\big(y(T)\big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.4)$$

$$\dot{p}(T) = -\frac{\partial}{\partial x} H\big(y(t), u(t), p(t), t\big) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial v} H\big(y(t), u(t), p(t), t\big) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1.6)$$

Para una explicación en detalle de este procedimiento puede consultarse (2).

En la formulación de Näslund (7), se estudian las relaciones entre las actividades administrativas y el tiempo de rotación utilizando la teoría del Control. Se definen:

x (t) = volumen de madera al tiempo t
v (t) = tasa de gastos silviculturales al tiempo t ($ por unidad de tiempo)
T = tiempo de rotación
i = tasa de interés del dólar
q_1 = precio neto esperado por unidad de volumen de madera al tiempo T (neto en el sentido de deducir los costos asociados a la tala, comercialización, etc).

Según Näslund, puede asumirse que la velocidad del incremento en volumen x decrece en forma proporcional a la diferencia entre el volumen de madurez A y el volumen x. Asimismo, se supone que la velocidad de incremento en volumen puede ser acelerada por efecto de la inversión en gastos silviculturales según la función f (v, t); de esta manera, propone la ecuación de evolución:

$$\dot{x} = f(v,t) + \mu(A - x)\text{.................................}(1.7)$$

$$x(o) = 0\text{...}(1.8)$$

donde μ y A son constantes positivas.

El costo asociado a minimizar es:

$$J(v(.),T) = \frac{1}{1-e^{-iT}} \int_0^T ve^{-it} \quad dt - \frac{q_1 \times (T)e^{-iT}}{1-e^{-iT}}\text{.................}(1.9)$$

El costo definido en (1.9) es el negativo del valor presente que origina una cadena infinita de rotaciones a la edad T, tal como se explica en los párrafos siguientes.

En primer lugar, 1 dólar invertido durante un período t, capitalizable en periodos de longitud t/n debe retornar $\left(1+\frac{it}{n}\right)n$ si la capitalización es automática, debe tomarse $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{it}{n}\right)^n = e^{it}$, de esta manera, 1 dólar al tiempo o vale e^{it} al tiempo t, y el valor actual de un dólar del tiempo t es e^{-it}.

Supóngase ahora que se decide rotar el rodal en periodos regulares T, 2T, 3T ..... siguiendo la misma política de inversión v(t), 0 ≤ t ≤ T, el valor presente de la inversión entre nT y (+ 1) T será:

$$\int_{nT}^{(n+1)T} v(t-nT)e^{-it} \quad dt = e^{-niT}\int_0^T v(u)e^{-iu} \quad du$$

de tal forma que el valor presente de la inversión total será:

$$I = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-niT} \quad \int_0^T v(t)e^{-it} \quad dt = \int_0^T v(t)e^{-it} \quad dt\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-iT}\right)^n = \frac{1}{1-e^{-iT}}\int_0^T v(t)e^{-it} \quad dt$$

Similarmente, el retorno total por la venta de madera es:

$$B = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-niT} q_1 \times (T) = e^{-iT} q_1 \times (T)\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-iT}\right)^n = \frac{q_1 \times (T)e^{-iT}}{1-e^{-iT}}$$

En consecuencia, el negativo del valor presente que origina una cadena infinita de cortes a la edad T es:

$$J(v(.),T) = -(B - I) = \frac{1}{1-e^{-iT}}\int_0^T v(t)e^{-it}dt - \frac{q_1 \times (T)e^{-iT}}{1-e^{-iT}}$$

DISCUSIÓN

Un método experimental para la determinación del impacto de la edad y la inversión en la velocidad de incremento en volumen definido por la función f(v, t) ha sido propuesto por Kuusela y Kilkki (5), dicho método hace uso del análisis de regresión y sugiere que la variable dependiente sea el porcentaje de incremento en volumen p = h (x, v, t), la cual permite obtener $\dot{x}$ mediante la relación $\dot{x}$= px-xh (x,v,t). Debido a las razones mencionadas en la introducción, antes que probar los modelos de regresión propuestos en (5); se ha optado por hacer una discusión teórica de las características de t(v, t) tomando como base la función de crecimiento propuesta por López y Gonzáles (6), para luego determinar los parámetros por regresión de $\dot{x}$. Sobre la base de registros sobre la edad y volumen de rodales de Pinus Radiata en Puno, López y Gonzáles (6), han determinado que una relación apropiada para explicar el volumen del rodal (x) en función del tiempo (t) es:

$$x = e^{\left(6.85 - 5.19779 e^{-0.0802t}\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.1)$$

Con la ayuda de (2.1) se ha construido el cuadro 1 en el cual se proporciona además el incremento en volumen (x) así como un estimado del costo de la inversión (v) bajo condiciones homogéneas de manejo.

Asumiendo que la inversión tiene un efecto multiplicativo sobre el efecto de la edad en la velocidad de incremento en volumen, y a partir de (1.7), la ecuación de evolución puede ser escrita como:

$$\dot{x} = b_0 - ux + g(t)h(v) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.2)$$

Observando el Cuadro 1, puede notarse que el incremento en volumen ($\dot{x}$) crece en los primeros años, para decrecer en los últimos, este sugiere que g(t) debe tener estas características, además de ser no negativa y posiblemente tenga un comportamiento asimétrico respecto de su punto máximo; las consideraciones mencionadas han conducido a proponer la función:

$$g(t) = b_1 t^2 e^{-b_2 t} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.3)$$

donde b_1 y b_2 son constantes positivas.

La función h(v), por hipótesis del Problema debe ser creciente, es razonable además que sea asíntota y que O ≤ h(v)<1 debido a lo cual se ha propuesto la función:

$$h(v) = \frac{\dot{v}}{v + b_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.4)$$

donde b_3 es una constante positiva..

De acuerdo a (1 .7) - (1.9) y (2.2) - (2.4) el problema de control quedaría planteado de acuerdo al siguiente enunciado:

$$MinJ\left(v(.),T\right) = \frac{1}{1 - e^{-iT}} \int_0^T v e^{-it} dt - \frac{q_1 \times (T) e^{-iT}}{1 - e^{iT}} \ldots\ldots\ldots\ldots (2.5)$$

$$\dot{x} = b_0 - \mu x + b_1 t^2 e^{-b_2 t} \frac{v}{v + b_3} \text{..}(2.6)$$

$$x(0) = 0 \text{...}(2.7)$$

Al imponer (1.4) - (1.6) se obtiene la solución para el control optimal u:

$$u = -b_3 + \sqrt{q_1 b_1 b_3}\, t e^{-\frac{b_2}{2}t - (\mu + i)\frac{(T-t)}{2}} \text{.....................................}(2.8)$$

CUADRO 1

GASTOS SILVICULTURALES Y RENDIMIENTO DE PINUS RADIATA

AÑO (t)	GASTOS (v)	% DE INCREMENTO (P)	VOLUMEN (m /Ha) (x)	INCREMENTOE N VOLUMEN (x)
1	47.36	1.000	7.857	7.857
2	47.36	0.303	11274.000	3.417
3	47.36	0.289	15.859	4.585
4	47.36	0.270	21.729	5.870
5	47.36	0.252	29.058	7.329
6	47.36	0.235	37.999	8.941
7	150.00	0.372	48.673	10.674
8	54.01	0.204	61.168	12.495
9	54.01	0.190	75.529	14.361
10	54.01	0.177	91.757	16.228
11	54.01	0.164	109.813	18.056
12	54.01	0.153	129.616	19.803
13	54.01	0.142	151.046	21.430
14	9.00	0.132	173.957	22.911
15	36.01	0.122	198.174	24.217
16	36.01	0.113	223.506	25.332
17	36.01	0.105	249.750	26.244
18	126.50	0.205	276.697	26.947
19	63.02	0.090	304.142	27.446
20	63.02	0.084	331.880	27.738
21	63.02	0.077	359.721	27.841
22	63.02	0.072	387.483	27.762
23	63.02	0.066	415.004	27.521
24	63.02	0.061	442.136	27.132
25	126.50	0.067	468.747	26.611
26	63.02	0.053	494.727	25.980
27	63.02	0.049	519.981	25.254
28	63.02	0.045	544.431	24.450
29	63.02	0.042	568.015	23.584
30	63.02	0.038	590.688	22.673
31	63.02	0.035	612.415	21.727
32	63.02	0.033	633.177	20.762
33	63.02	0.030	652.962	19.785

La trayectoria optimal del volumen (y) puede obtenerse reemplazando el control optimal u en (2 6), y resolviendo la ecuación. Multiplicando (2.6) por e^{ut} se obtiene:

$$e^{ut}\left(\dot{y}+\mu y\right)=b_0+b_1t^2e^{-b_2t}\ \frac{u(t)}{u(t)+b_3}\ e^{\mu t}$$

luego:

$$\frac{dye^{ut}}{dt}=(b_0+b_1t^2e^{-b_2t}\ \frac{u(t)}{u(t)+b_3})e^{\mu t}$$

y teniendo en cuenta (2.7):

$$y=e^{-\mu t}\int_0^t\left(b_0+b_1s^2e^{-b_2s}\ \frac{u(s)}{u(s)+b_3}\right)e^{\mu s}\,ds=\frac{b_0}{\mu}+ke^{-\mu t}+p_1(t)e^{-(i+\mu+b_2)\frac{t}{2}+p_2(t)e^{-b_2t}} \quad \text{..................(2.9)}$$

donde:

$$k=-\frac{b_0}{\mu}-\mu\frac{\sqrt{b_1b_3}}{\sqrt{q_1}}\ \frac{e^{(\mu+i)\frac{T}{2}}}{(\mu-i-b_2)^2}-\frac{2b_1}{(\mu-b_2)^3}$$

$$p_1(t)=-2\frac{\sqrt{b_1b_3}}{\sqrt{q_1}}e^{(\mu+i)\frac{T}{2}}\left(\frac{t}{(\mu-i-b_2)}-\frac{2}{(\mu-i-b_2)^2}\right)$$

$$p_2(t)=\frac{b_1}{(\mu-b_2)}\left(t^2-\frac{2t}{(\mu-b_2)}+\frac{2}{(\mu-b_2)^2}\right)$$

Reemplazando (2.8) y (2.9) en (2.5) se obtiene la funcional objetivo dependiendo únicamente de T, el resultado es el siguiente:

$$J(T)=-\frac{b_3}{i}+\frac{1}{1-e^{-it}}\left(k_1e^{-(i+\mu)\frac{T}{2}}+k_2e^{-iT}+k_3e^{-(i+\mu)T}+p_1^{(T)e^{-(i+\frac{b_2}{2})T}}+p_2(T)e^{-(i+b_2)T}\right) \quad \text{..............(2.10)}$$

donde:

$$k_1=\frac{8\sqrt{q_1b_1b_3}}{(\mu-b_2-i)^2}$$

$$k_2=\frac{b_0q_1}{\mu}$$

$$k_3=\frac{b_0q_1}{\mu}+\frac{2b_1q_1}{(\mu-b_2)^3}$$

$$p_1(T) = \frac{\sqrt[4]{q_1 b_1 b_3}}{(\mu - b_2 - i)}(T - \frac{2}{(\mu - b_2 - i)})$$

$$p_2(T) = -\frac{b_1 q_1}{(\mu - b_2)}\left(T^2 - \frac{2T}{(\mu - b_2)} + \frac{2}{(\mu - b_2)^2}\right)$$

La ecuación (2.10) permite obtener el tiempo optimal T* al minimizar J(T), para cuyo efecto se ha impuesto la condición J'(T*) = 0. Los resultados se presentan en la siguiente sección.

RESULTADOS

Para el ajuste del modelo de regresión (2.6) se ha considerado necesario fijar los valores de u y b_3; la razón es que la estimación de u requiere la exploración del comportamiento del volumen en edades avanzadas, hecho que no ha sido considerado en los registros del Cuadro 1, por otro lado, la estimación de b_3 requiere de una exploración del impacto de la inversión en rodales coetáneos, estos registros no han estado disponibles. De esta manera, se ha fijado el valor de u = 0.004, y el valor de b_3 = 5 para ajustar el modelo (2.6) con los datos del Cuadro 1 utilizando el procedimiento de regresión no lineal del paquete estadístico SAS. Los resultados del ajuste se muestran en el Cuadro 2. Para la obtención del tiempo de rotación óptimo se han considerado los resultados del Cuadro 2, así como la ecuación (2.10); se ha fijado la tasa de interés en i = 0.06 y el precio de la madera en 32.26 dólares por m^3; asimismo, para minimizar J(T) se ha impuesto J´:(T*) = 0, ecuación que ha sido resuelta utilizando el método de la secante (3). El tiempo de rotación óptima fue T* = l 8.43.

En el Cuadro 3 se presentan los resultados de la aplicación del método de la secante iteración por iteración, así como el cálculo de J(T*) y la inversión óptima año por año, además del volumen pronosticado, para el cálculo de estos valores se han utilizado (2.8) y (2.9).

Debe mencionarse que la inversión de tipo creciente observada en el Cuadro 3 se ha debido a que la tasa de interés ha primado sobre la tendencia de la velocidad de crecimiento (la cual depende íntimamente de b_2) de esta forma, la inversión de tipo creciente obedece al hecho de que el dinero invertido se deprecia menos cuando el tiempo de corte está cercano.

CUADRO 2

ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS DEL MODELO

$$Z = b_o + b_1 \, t v_1 \, e^{-b2t} + \varepsilon$$

$$\text{donde: } Z = \dot{x} - 0.04\,x$$

$$v_1 = \frac{v}{v+5}$$

FUENTES DE VARIACIÓN	GRADOS DE LIBERTAD	SUMA DE CUADRADOS	CUADRADO MEDIO
Regresión	3	13114.61922229	4371.53974076
Error	30	78.96528537	2.63217618
Total no corregido	33	13193.58450766	
(Total corregido)	32	1694.65217546	

PARAM.	ESTIMACIÓN	DESVIACIÓN ESTÁNDAR Asintótica	INTERVALO DE CONFIANZA Asintótica al 95%	
			inferior	superior
B2	0.09842932	0.01713300	0.06343932	0.13341933
B1	0.43070700	0.02984124	0.3697635	0.49165051
B0	1.84914625	0.76786645	0.28096503	3.41732748

MATRIZ DE CORRELACIÓN ASINTÓTICA DE LOS PARÁMETROS

	B2	B1	B0
B2	1.000000	0.103412	0.648126
B1	0.103412	1.000000	-0.687445
B0	0.648126	-0.687445	1.000000

CUADRO 3

OPTIMIZACIÓN MÉTODO DE LA SECANTE

ITERACIÓN	T*
1	18.82106
2	18.39944
3	18.4335
4	18.43285

J(T*) = Valor Presente del Negativo de los Beneficios Futuros = - 3954.66113

PROGRAMA DE INVERSIONES Y RENDIMIENTOS

AÑO T	INVERSION ($) v(T)	RENDIMIENTO (m3 /Ha)
1	1.05966	1.88208
2	3.04908	4.30566
3	4.97005	7.83252
4	6.82432	12.84814
5	8.61361	19.59814
6	10.33961	28.2146
7	12.00394	38.74048
8	13.60821	51.15112
9	15.15398	65.36963
10	16.64279	81.28027
11	18.07611	98.74097
12	19.45543	117.59253
13	20.78215	137.66382
14	22.05769	158.77979
15	23.28337	180.76489
16	24.46056	203.448
17	25.590053	226.66357
18	26.67456	250.25635

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

1. De acuerdo a la tendencia de crecimiento propuesta por López y Gonzales, es aconsejable una rotación económica entre los 18 y 19 años para un rodal de Pinus Radiata.

2. Debido a que el tiempo de rotación se ve afectado por la tasa de interés, debe mencionarse que, tal como lo muestra Bensoussan (2), un aumento en la tasa de interés fuerza a invertir menos al inicio de la plantación, y más cuando la rotación está cercana.

3. Los resultados del presente estudio se han visto restringidos por la carencia de los registros apropiados, por esta razón es aconsejable que la administración de rodales considere la importancia del registro de datos acerca de los gastos silviculturales, así como su influencia en la velocidad de crecimiento del volumen de madera.

4. Teniendo en cuenta que existen factores no considerados en este estudio, como son la época del raleo y los gastos iniciales de la plantación, este modelo puede estar sujeto a modificaciones que puedan representar una situación más general.

BIBLIOGRAFÍA

(1) BALAKRISHNAN,A.V. “Calculus of Variations and Control Theory"; Academic Press; New York; 1969.

(2) BENSOUSSAN, A., GERALD HURST, E., NÄSLUND, B.; "Management Applications of Modern Control Theory", North-Holland; Amsterdam; 1974.

(3) HILDEBRAND, F.B.; 'Introduction to Numeral Analysis"; Mc Graw-Hill; New York, 1956.

(4) KREIDER, D.L., KULLER, R.G., OSTBERG, D.R.; "Introducción al Análisis Lineal"; Fondo Educativo Interamericano, Bogotá; 1971.

(5) KUUSELA, K KILKKI, P.; 'Multiple Regression of Increment Percentage on Other Characteristics in Scotch - Pine Stands"; Acta Forest Fenn; Helsinki; 1964.

(6) LÓPEZ, R., GONZÁLES, M.; 'Crecimiento del Pinus Radiata en Puno-Perú"; Revista Forestal del Perú; Lima; 1981.

(7) NÄSLUND, B.; "Optimal Rotation and Thinning"; Forest Sciencie; Amsterdam; 1969.

(8) PONTRYAGIN. L.S.; "Ordinary Differential Equations ", Addison-Wesley; Massachussets; 1962.

(9) PONTRYAGIN, L.S., BOLTYANKII, V.G., GAMKRELIDZE, R.V., MISCHENKO, E.F.; "The Mathematical Theory of Optimal Processes"; Wiley Interscience; New York; 1962.